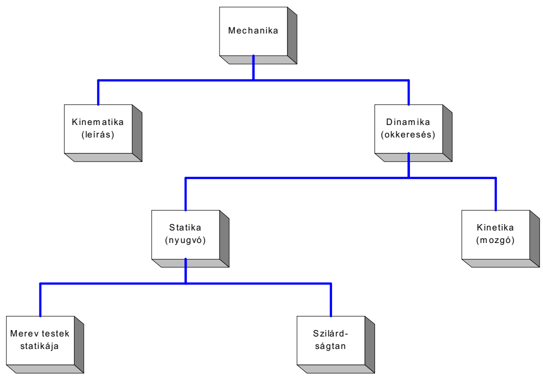
STATIKA

1. A mechanika felosztása

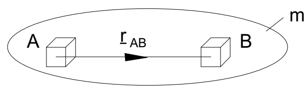
A legáltalánosabb felosztás: a mozgások leírását jelentő kinematika valamint a mozgás megértését kereső dinamika, amely a nyugalom, vagyis a *statika* és a mozgások tervezését lehetővé tevő *kinetika* részekből áll.



2. Általános fogalmak

2.1 Az anyagi test fogalma

Az anyagi testet kontinuumnak tekintjük, ami azt jelenti, hogy az anyag a test alakja által kijelölt teret folytonosan tölti ki. A legegyszerűbb az az anyagi test, amelynek alakja a mozgás során nem változik. Az ilyen testet merev testnek nevezzük. Merev test esetén a test bármely két pontjának a távolsága állandó: AB=áll.

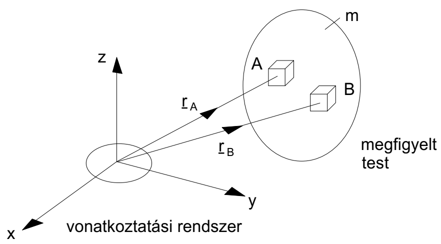


2.2 Az anyagi pont fogalma

Az anyagi pont olyan kisméretű *m* tömegű anyagi test, amelynek a legnagyobb geometriai mérete a mozgás pályájához képest elhanyagolható. Így például a Naprendszer bolygói anyagi pontoknak tekinthetők.

2.3 A mozgás fogalma

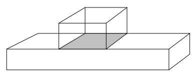
Az anyagi test mozgásán annak egy merev testhez rögzített koordináta-rendszerhez, egy ún. vonatkoztatási rendszerhez viszonyított helyzet- ill. helyváltoztatását értjük.



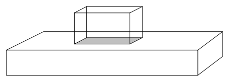
2.4 Az erő fogalma

Erőnek nevezzük két test egymásra gyakorolt hatását, ha annak következtében a testben mozgásállapot-változás vagy alakváltozás következik be.
Jele: $\underline{F}$, mértékegysége N (kN, MN, GN).
Két test egymásra gyakorolt hatása létrejöhet közvetlen érintkezéssel vagy érintkezés nélkül.
Közvetlen érintkezés esetén felszíni erőkről beszélünk. Az érintkezés történhet:

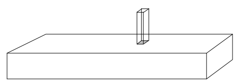
- egy felület mentén $\rightarrow$ felület mentén megoszló erőrendszer (p [N/m^2])



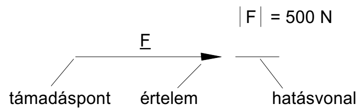
- egy él mentén $\rightarrow$ él mentén megoszló erőrendszer (p [N/m]).



- egy pont mentén $\rightarrow$ koncentrált erő



Ha a két test egymásra gyakorolt hatása közvetlen érintkezés nélkül jön létre, akkor tömegerőről vagy térfogati erőről beszélünk.
Az erőt három adat jellemzi: nagyság, értelem és hatásvonal, azaz az erő vektormennyiség:

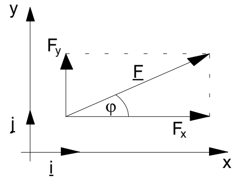


Egy testre egyidejűleg több erő is hathat. Az egyugyanazon testre ható erők összességét erőrendszernek nevezzük.

2.5 Erők összevonása ill. felbontása összetevőkre

A Newton-féle szuperpozíció-elv alapján az erők felbonthatók, illetve összegezhetők:
- két, az erővel közös síkban fekvő (nem párhuzamos) hatásvonal irányába.
- három, nem egy közös síkban fekvő hatásvonal irányába.

Az erő síkbeli felbontása:



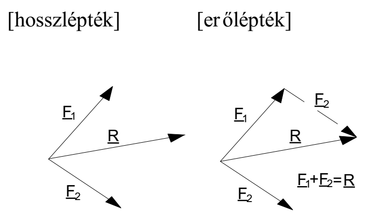
$F_x = F \cos \varphi$
$F_y = F \sin \varphi$

F_x és F_y az F erő skalár komponensei az x és az y tengely irányában.
Az erő felírása: $\underline{F} = F_x\, \underline{i} + F_y\, \underline{j}$ vagy oszlopvektor formájában (mátrix):

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$$

Az erő nagysága: $$|\underline{F}| = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

2.6 Erők összeadása szerkesztéssel:

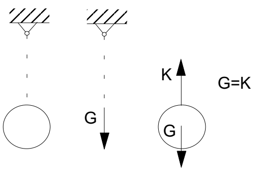


szerkezeti ábra   vektorábra

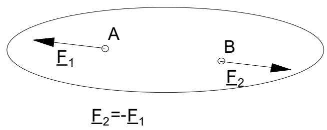
3. A statika alaptételei

A mechanika - hasonlóan a többi természettudományhoz - axiómáit megfigyelések és tapasztalatok alapján állította fel.

1. alaptétel: Newton III. axiómája, az akció-reakció elve, amely kimondja, hogy két testnek egymásra gyakorolt hatása mindig egyenlő egymással és ellentétes értelmű.



2. alaptétel: a testre ható két erő akkor és csakis akkor van egyensúlyban, ha a két erő hatásvonala közös, nagysága azonos és értelme ellentett.



3. alaptétel: közös támadáspontú erőrendszer mindig helyettesíthető egy vele egyenértékű egyetlen erővel, az eredővel. Az eredő erő:

$$\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = \sum \underline{F}_i$$

Az eredő támadáspontja megegyezik a közös támadásponttal.

4. alaptétel: (csak merev testre igaz!) merev testen támadó erőrendszer hatása nem változik, ha hozzáadunk vagy elveszünk belőle egy másik, önmagában egyensúlyban lévő erőrendszert.
A tétel következménye: merev testen támadó erők hatásvonaluk mentén eltolhatók, azaz a támadáspontnak nincs jelentősége.

5. alaptétel: (kapcsolatot teremt a statika és a szilárdságtan között) ha bármilyen szilárd test a ráható külső erők hatására alakváltozást szenved, majd ismét nyugalomba kerül, akkor ebben a deformált állapotában helyettesíthető egy vele egyező alakú merev testtel.

4. A kényszerek

A testek mozgását sokszor kötöttségek korlátozzák. A leggyakoribbak a geometriai kötöttségek, amelyek esetén a testek egy adott merev nyugvó felületen vagy görbén mozoghatnak.

Kényszernek nevezzük a mozgást gátló elemeket, vagyis mindazokat a kapcsolatokat, erőhatásokat, amelyek egy test mozgását korlátozzák vagy megakadályozzák.

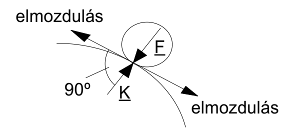
Azokat az erőket, amelyeket a testre a kényszerek fejtenek ki, kényszererőknek vagy reakcióerőknek, a testet terhelő ismert erőket pedig aktív erőknek nevezzük.

A kényszerkapcsolatokból, a lehetséges elmozdulásokból következtetni lehet a kölcsönhatásként jelentkező kényszererőkre.

A kényszerek tárgyalásakor feltételezzük, hogy az érintkező testek felülete tökéletesen sima.

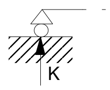
4.1 A kényszerek fajtái

1. A megtámasztás: olyan kényszer, amelynél a testet egy másik testre helyezzük.



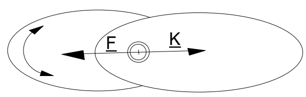
Miután az érintkező felületek tökéletesen simák, ezért a közös érintősík irányában nem lép fel erő - így tehát a test ebben az irányban el is mozdulhat - emiatt a felületek egymást kölcsönösen a közös normális irányában nyomják. Vagyis a megtámasztásnál fellépő kényszererő mindig normális irányú.

Jelölése:



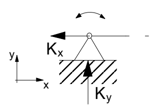
A megtámasztás 1 ismeretlent jelent: az erő előjeles nagyságát.

2. A síkcsukló: olyan kényszer, amely az egyik testnek egy másik testhez rögzített csap körüli elfordulását teszi lehetővé.



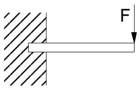
Miután a csukló csak tengely körüli elfordulást tesz lehetővé, elmozdulást pedig nem, ezért a kényszererő a tengelyre merőleges síkban helyezkedik el, és átmegy a csukló geometriai középpontján.

Jele:

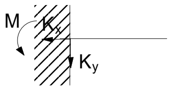


A síkcsukló 2 ismeretlent jelent: egy síkbeli erő előjeles nagyságát és irányát.

3. A befogás: olyan kényszer, amely egy testet a megfogás helyén mereven rögzít a helytálló környezethez.

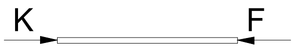


Miután a befogás nemcsak elmozdulást, hanem elfordulást sem tesz lehetővé, ezért a fellépő síkbeli kényszererőn kívül egy nyomaték is ébred a kényszer hatásaként. Ebből következik, hogy a befogás bármilyen tetszőleges erőrendszer átadására alkalmas ill. bármelyik erőrendszerrel képes egyensúlyt tartani.
Jelölése:



A síkbeli befogás 3 ismeretlent jelent: egy síkbeli erő irányát, nagyságát és egy nyomatékot.

4. A rúd: összetett kényszer, amelyet súlytalannak tekintünk. Alakja lehet egyenes vagy síkgörbe. A rúd csak akkor tekinthetõ kényszernek, ha csak a végein kap terhelést. A csak a végein terhelt rúd akkor lehet egyensúlyban, ha a kényszererõ rúdirányú. Rúdirány: a rúd két végpontját összekötő egyenes.
A rúd egy olyan test, amelynek az egyik mérete (a hossz menti) lényegesen nagyobb a másik kettõnél (a keresztmetszetnél).



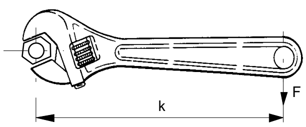
A rúd 1 ismeretlent jelent: az erő előjeles nagyságát.

5. A kötél: a kényszerként alkalmazott kötél súlytalan, nyújthatatlan és tökéletesen hajlékony. A kötélben ébredő kényszererő mindig kötélirányú. Az egyensúly feltétele, hogy a kötél húzott legyen.
Jele:

A kötél 1 ismeretlent jelent: a húzóerő nagyságát.

5. Az erő statikai nyomatéka

Amikor két, egymáshoz csavarkötéssel rögzített lemeznél a csavaranyát villáskulccsal meghúzzuk, a villáskulcsra ható F erő forgató hatást vált ki. Ennek a forgatóhatásnak a mértéke egyenesen arányos az erő nagyságával és az erő hatásvonalának a forgásponttól mért távolságával.



Vizsgáljuk meg mindezt általánosan. Legyen adott egy O pont körül elforgatható lemez. Működtessünk rajta egy F erőt. A lemez az erő hatására elfordul.
Általánosan kimondhatjuk: az elfordulás síkja az erővektor és a pont által meghatározott sík, az elfordulás tengelye pedig az O ponton átmenő, a síkra merőleges t-t tengely.
Tehát az erő forgató hatással rendelkezik. Az erő forgató hatását a statikai nyomaték méri. Ennek mértékéül az

$$M = F \cdot k$$

szorzatot vezetjük be, ahol:
M: az F erő t tengelyre vett statikai nyomatéka
k: az erő karja (a t tengely és az erő hatásvonala közötti normáltranzverzális)
Az erő statikai nyomatékának mértékegysége: Nm.
Alkalmazott előjelszabály: az a nyomaték pozitív, amely felülről nézve az óramutató járásával ellenkező értelemben forgat. (A jobbmenetű csavarnál a rögzítés negatív, az oldás pozitív forgatónyomatékkal történik.)
A statikai nyomatékot nemcsak tengelyre, hanem pontra is számíthatjuk.

A t tengely O pontjára számított nyomatékvektora:

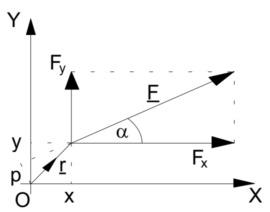
$$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}.$$

Az $\underline{M}$ vektor az $\underline{r}$ és $\underline{F}$ vektorok síkjára merőleges úgy, hogy $\underline{r}$, $\underline{F}$ és $\underline{M}$ jobb sodrású koordinátarendszert alkot. A nyomaték nagysága: $|M| = |F|\,|r|\,\sin\varphi = F \cdot k$.
A vektorszámítás az erő nyomatékának forgatóértelmét egyértelműen meghatározza.

A tengelyre és a pontra vett statikai nyomatékok között kapcsolat áll fenn, miszerint: a t tengelyre vett nyomaték az O pontra vett nyomatékvektornak a t tengelyre eső vetülete. A pontra vett nyomaték zérus, ha az erő hatásvonala átmegy a ponton. A tengelyre vett nyomaték zérus, ha az erő hatásvonala metszi a tengelyt, vagy párhuzamos a tengellyel.

Nyomatéki tétel:

Az erő valamely pontra számított nyomatéka egyenlő a komponensek ugyanezen pontra vett nyomatékának összegével.
Másképpen: egy erőrendszer eredőjének nyomatéka a sík bármely pontjára ugyanakkora, mint az erők ugyanazon pontra vett nyomatékainak összege.
Az O pontra vett nyomatékvektor:

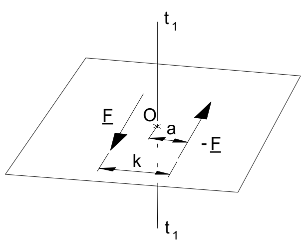


$$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = (x \cdot F_y - y \cdot F_x)\,\underline{k}$$

De: a komponensekkel $M = F_y \cdot x - F_x \cdot y = p\,F\,\underline{k}$.
Így: $p\,F = x \cdot F - y \cdot F$, tehát a nyomatéki tétel igaz.

6. Az erőpár

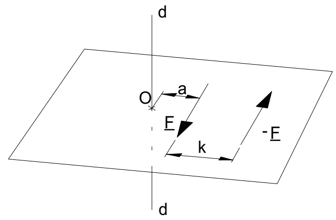
Két egyenlő nagyságú, párhuzamos hatásvonalú és ellentétes értelmű erőből álló erőrendszert erőpárnak nevezzük. A két párhuzamos erő síkot határoz meg, ez az erőpár síkja.



Ha az erőpár egy olyan merev lemezen hat, amely a síkjára merőleges t tengely körül elfordulhat, akkor az erőpár a merev testet a forgástengely körül el fogja forgatni, vagyis az erőpár forgatóhatással, nyomatékkal bír. Határozzuk meg az erőpárt alkotó erőknek a nyomatékát az O ponton átmenő, az erőpár síkjára merőleges t tengelyre:

$$M = F\,a + F\,(k - a) = F\,k$$

F: az egyik erő nagysága, az erőpár alapja
k: az erőpárt alkotó két erő merőleges távolsága, az erőpár karja
Ha a nyomatékot egy másik tengelyre írjuk fel:



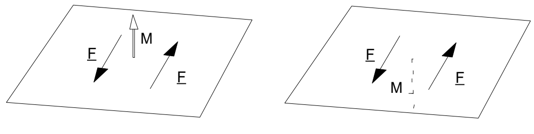
$M = F\,(a+k) - F\,a = F\,k$ → természetesen ugyanazt az összefüggést kapjuk. Az eredményből két fontos megállapítást tehetünk:

- A nyomaték nagysága nem függ az *a* mérettől, vagyis nem függ a forgástengely helyzetétől → az erőpár nyomatéka a síkjára merőleges valamennyi tengelyre ugyanakkora.
- Az erőpár nyomatékát az egyik erőnek és az erők merőleges távolságának szorzata adja: $M = F\,k$.

Tehát az erőpárt a síkja és a nyomatéka jellemzi. Az előzőekből következik, hogy az erőpárt a saját síkjában párhuzamosan elcsúsztathatjuk, elforgathatjuk, ill. a saját síkjával párhuzamosan is eltolhatjuk. Bizonyítás nélkül is belátható, hogy az erőpár forgató hatása a síkjára merőleges bármely tengely körül változatlan marad.
Ha ugyanazon síkban, vagy párhuzamos síkokban ható két erőpár nyomatékának összege zérus, akkor a két erőpár egyensúlyban van. Ebből következik, hogy ha közös síkban vagy párhuzamos síkokban működő két erőpár nyomatéka egyenlő, akkor a két erőpár egymással egyenértékű. Az egyenértékűségből következik, hogy az erőpárnál sem az erőnek, sem a karnak külön-külön nincs jelentősége. A kettő szorzata, a nyomaték a fontos jellemző.
Mindezekből következik, hogy az erőpárnak három meghatározó jellemzője van:

- síkjának állása
- a forgató hatás, a nyomaték értelme
- a nyomaték nagysága.

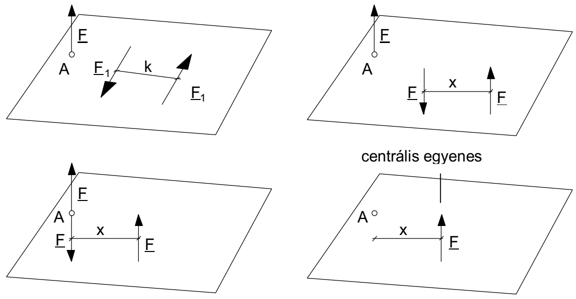
Tehát az erőpár egy vektorral jellemezhető. Az erőpár nyomatékvektora az erőpár síkjának normálvektora irányába mutat. Nagysága: $F\cdot k$. Értelmét úgy vesszük fel, hogy a nyílból nézve a forgásnak az óramutató járásával ellentétesnek kell lennie (jobbmenetű csavar).



Miután a nyomatékvektor egyértelműen megadja az erőpárt, ezért a statikában koncentrált erőpárokkal foglalkozunk, ahol F és k értéke lényegtelen, csak $\underline{M}$ a fontos. Értelmezésénél fogva az erőpár nyomatékvektora nem kötött vektor-szemben az erővektorral-, hanem szabad vektor, ui. a tér bármely pontjához hozzárendelhető.
Az erőpárok nyomatékvektorai az erővektorokhoz hasonlóan, a vektoralgebra szabályai szerint összegezhetők: $\underline{M} = \underline{M_1} + \underline{M_2}$
Az erőpár, hasonlóan az erőhöz, önálló terhelés. A testeket tehát erők és erőpárok terhelhetik.

6.1 Közös síkú erő és erőpár eredője

Tétel: Közös síkban fekvő erő és erőpár mindig helyettesíthető egyetlen erővel, vagyis a közös síkú erő és erőpár eredője egyetlen erő.
Ennek igazolása a következő ábrán látható:



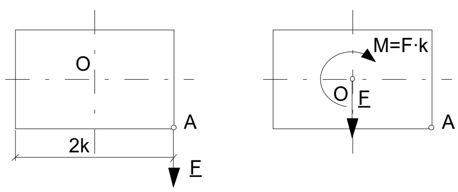
A merev testre Fk nyomatékú erőpár és a test *A* pontjában az erőpár síkjával párhuzamos F erő hat. Feladat az adott erőrendszer eredőjének a meghatározása. A megoldás lépései:

1. Az Fk nyomatékú erőpárt párhuzamosan eltoljuk az *A* ponton átmenő síkba, és itt helyettesítjük Fx = Fk erőpárral.
2. Ezt az Fx erőpárt - az ábrának megfelelően - az adott F erő hatásvonalába úgy toljuk el, hogy az erőpár két ereje közül az adott F erő hatásvonalába az F erővel ellentétes értelmű erő kerüljön.
3. Az *A* pontban a két F nagyságú erő egyensúlyt tart. Ezek a negyedik alaptétel értelmében elhagyhatók, így eredőül egyetlen F erő marad párhuzamosan eltolt helyzetben. Az eltolás mértéke: $x = F_1 \cdot k / F$.

Az erő eltolásakor olyan helyzetbe kerül, hogy az eltolt hatásvonalú F erő az adott *A* ponton átmenő és a síkra merőleges tengely körül úgy forgat, mint az adott Fk nyomatékú erőpár forgatott. A szabályt így fogalmazhatjuk meg:

Az erő és a vele párhuzamos síkú erőpár eredője egyetlen erő, éspedig az adott erővel egyező erő, párhuzamosan eltolt helyzetben; ennek az eltolt helyzetű erőnek a nyomatéka a tér bármely pontjára egyenlő az eredeti erőrendszer (az *A* ponton átmenő erő és az erőpár) ugyanerre a pontra számított nyomatékával.
Az eltolt helyzetben lévő eredő erő hatásvonalát centrális egyenesnek nevezik. Így a szabály másképpen is fogalmazható: Egy erő és vele párhuzamos síkú erőpár eredője egyetlen erő, amelynek hatásvonala a centrális egyenes (a centrális egyenes: a végső redukálás eredményeként kapott egyetlen erő hatásvonala).
A feladat megfordítása az erő áthelyezése, redukálása: Ha az erőt önmagával párhuzamosan új helyzetbe toljuk el, akkor melléje társul egy erőpár. Az eltolt helyzetű erőnek és az erőpárnak együttes hatása azonos azzal a hatással, amit az eredeti erő az eredeti helyén fejt ki a merev testre.

<u>Redukálás:</u>



Helyezzük át az *A* pontban ható $\underline{F}$ erőt az O pontba.
Eredmény: az O pontban az $\underline{F}$ erő és egy M = Fk erőpár, amely az eredeti (*A* pontbeli) $\underline{F}$ erővel azonos értelemben forgat O pont körül.

7. Erőrendszerek vizsgálata

A statika a merev testek tartós nyugalmi helyzetének feltételével foglalkozik. A testek egyensúlyát mechanikai kényszerekkel biztosítjuk, ui. a test az aktív erők és a kényszererők hatására lesz nyugalomban.

7.1 Közös metszéspontú erők egyensúlya

A közös támadáspontú (vagy közös metszéspontú) n erőből álló erőrendszer eredője (a statika 3. alaptétele alapján):

$$\underline{R} = \sum_1^n \underline{F}_i = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \ldots + \underline{F}_n$$

$$\underline{R} = R_x\underline{i} + R_y\underline{j} + R_z\underline{k}$$

Nyílván:

$$R_x = \sum F_{xi} = \sum X_i$$

$$R_y = \sum F_{yi} = \sum Y_i$$

$$R_z = \sum F_{zi} = \sum Z_i$$

Vezessük be:

$$F_{x1} = X_1 \qquad F_{x2} = X_2 \qquad F_{xn} = X_n$$

$$F_{y1} = Y_1 \qquad F_{y2} = Y_2 \qquad F_{yn} = Y_n$$

$$F_{z1} = Z_1 \qquad F_{z2} = Z_2 \qquad F_{zn} = Z_n$$

jelöléseket.

Az egyensúlyi erőrendszer egy speciális erőrendszer, amelynek hatására a testek mozgásállapotában nem következik be változás (Newton l. axiómája). Egyensúlyi erőrendszer esetén az eredő erő zérus: $\underline{R} = \underline{0}$.
A felírható 3 skalár egyenlet:

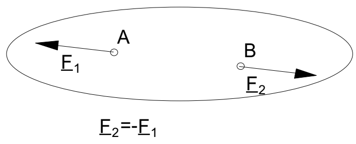
$$R_x = \sum X_i = 0$$

$$R_y = \sum Y_i = 0 \qquad \text{egyensúlyi egyenletek}$$

$$R_z = \sum Z_i = 0$$

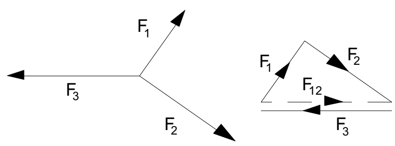
7.1.1 Két erő egyensúlya

A második alaptétel szerint a testre ható két erő akkor és csakis akkor van egyensúlyban, ha a két erő hatásvonala közös, nagysága azonos és értelme ellentett.



7.1.2 Három erő egyensúlya

Három erő egyensúlyát visszavezetjük két erő egyensúlyára, ezért a három erő közül tetszőleges kettőt az eredőjével helyettesítjük. Viszont a harmadik alaptétel szerint két erő csak akkor helyettesíthető egyetlen erővel, ha a két erő metszi egymást, azaz közös síkban vannak. Ez esetben az eredő is ugyanebbe a síkba esik. Evvel az eredővel a harmadik erő csak úgy tarthat egyensúlyt, ha az eredővel közös síkba esik, vagyis ha a harmadik erő is az előbbi két erő síkjában fekszik.
Három erő egyensúlyának első feltétele tehát, hogy a három erő egy közös síkba essék.



Először az $\underline{F}_1$ és $\underline{F}_2$ erők eredőjét határozzuk meg. Az eredő vektorát a vektorháromszög adja, és az eredő keresztülmegy a két erő M metszéspontján. Egyensúly csak akkor lehet, ha $\underline{F}_3$ közös egyenesbe esik az $\underline{F}_{12}$ eredővel, és $\underline{F}_3$ ugyanakkora csak ellentétes értelmű mint $\underline{F}_{12}$, vagyis $\underline{F}_3 = - \underline{F}_{12}$. A vektorháromszög $\underline{F}_{12}$ vektorának helyébe az $\underline{F}_3$-at rajzoljuk. Látható, hogy egyensúly esetén a vektorháromszög folytonos nyílfolyammal záródik.
Tehát három erő egyensúlyának feltételei:

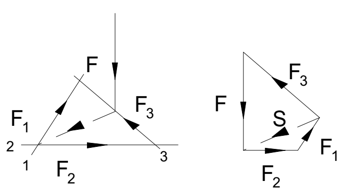
1. hatásvonaluk egy pontban metsződik
2. vektorháromszögük záródik és folytonos nyílfolyamú

és ezekből következően hatásvonaluk közös síkban van

7.1.3 Négy erő egyensúlya

Adott: egy erő nagysága, iránya, értelme és vele közös síkban lévő három erő hatásvonala. Feladat: a három adott hatásvonalon működő erők meghatározása úgy, hogy a kapott négy erő egyensúlyban legyen. A feladat egyértelműen nem megoldható, vagyis határozatlan, ha mind a négy erő közös ponton megy keresztül. Ha csak három erő megy át egy közös ponton, a negyedik különálló erő, akkor nem lehet egyensúly.

7.1.3.1 Culmann-féle szerkesztő eljárás



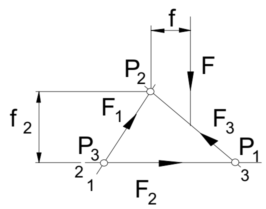
A négy erő egyensúlyát három erő egyensúlyára vezetjük vissza:

$\underline{F} + \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = \underline{0}$ $\quad\quad$ $\underline{F} + \underline{F}_{12} + \underline{F}_3 = \underline{0}$ $\quad\quad$ $\underline{F}_{12} = \underline{S}$

Az $\underline{F}_1$ és $\underline{F}_2$ erők eredőjéről azt tudjuk, hogy átmegy az 1 és 2 hatásvonal metszéspontján, de az így maradt három erő egyensúlyának feltétele többek között a közös metszéspont, így $\underline{F}_{12}$-nek az $\underline{F}$ és $\underline{F}_3$ metszéspontján is át kell mennie, így ismertté válik az $\underline{F}_{12}$ eredő hatásvonala, az ún. segédirány. A kapott három erővel megszerkesztve a záródó, folytonos nyílfolyamú vektorsokszöget, $\underline{F}_1$, $\underline{F}_2$ és $\underline{F}_3$ meghatározható.

A módszer alkalmas egy erő három síkbeli komponensre történő felbontására is.

7.1.3.2 A Ritter-féle számító eljárás



Jelöljük ki két-két ismeretlen erő hatásvonalának metszéspontját. Az így kapott pontok (P_1, P_2, P_3) a vonatkozó erők főpontjai. Pl. a P_2 főpont az F_2 erő főpontja. Írjuk fel a nyomatéki egyensúlyi egyenleteket a főpontokra illeszkedő, a szerkezet síkjára merőleges tengelyre. Pl. F_2 erő meghatározása:

$$\sum_{(P_2)} \underline{M}_i = -f \cdot F + f_2 \cdot F_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_2 = \frac{f}{f_2} \cdot F$$

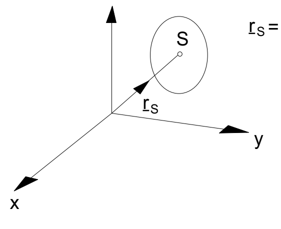
Az eljárás előnye, hogy a felírható egyenletekben csak egy ismeretlen van, a kiszámítandó erő.

8. A súlypont

A Földön lévő valamennyi testre a Föld vonzásából és forgásából származó erő hat. Mivel ez a hatás a test minden elemére kiterjed, így egy térben megoszló erőrendszert alkot, amely - a Föld középpontjának nagy távolsága miatt - párhuzamos, függőleges irányú elemi erőkből áll. Ennek a párhuzamos erőrendszernek az eredője a test súlya, amelynek hatásvonala a test súlypontján megy keresztül.

Tehát a súlypont a súlyerő rendszer középpontja, azaz az eredő támadáspontja.

8.1 A súlypont számítása



$$\underline{r}_S = \frac{\int \underline{r}\, dm}{\int dm} = \frac{\int \underline{r}\, dm}{m}$$

ahol $\underline{r}_S$ a súlypont helyvektora. (m a test tömege, $\underline{r}$ a dm tömegelem helye)

Homogén tömegeloszlású testek esetén (ρ = áll.) a súlypont helye ($dm = \rho\, dV$):

$$\underline{r}_S = \frac{\int \underline{r}\, dm}{\int dm} = \frac{\int \underline{r}\ \rho\, dV}{\int \rho\, dV} = \frac{\int \underline{r}\, dV}{\int dV} = \frac{\sum \underline{r}_i V_i}{\sum V_i}$$

A súlypont koordinátái:

$$x_S = \frac{\int x\, dV}{\int dV} = \frac{\sum x_i V_i}{\sum V_i}$$

$$y_S = \frac{\int y\, dV}{\int dV} = \frac{\sum y_i V_i}{\sum V_i}$$

$$z_S = \frac{\int z\, dV}{\int dV} = \frac{\sum z_i V_i}{\sum V_i}$$

A test szimmetriasíkjai mindig átmennek a súlyponton.

Síkidomok súlypontja:

$$\underline{r}_S = \frac{\int \underline{r}\, dA}{\int dA} = \frac{\sum \underline{r}_i A_i}{\sum A_i}$$

A súlypont koordinátái a síkidomhoz kötött koordinátarendszerben:

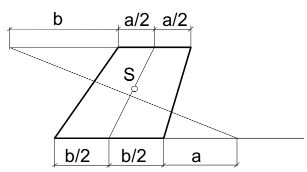
$$x_S = \frac{\int x\, dA}{\int dA} = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}$$

$$y_S = \frac{\int y\, dA}{\int dA} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}$$

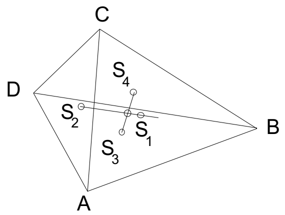
$$z_S = \frac{\int z\, dA}{\int dA} = \frac{\sum z_i A_i}{\sum A_i}$$

A síkidom szimmetriatengelyei mindig átmennek a súlyponton.

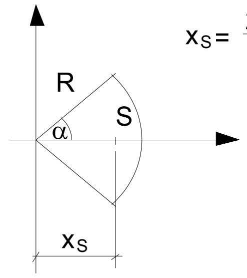
Néhány síkidom súlypontja:
- Háromszög: az oldalfelezők metszéspontja, ill. a magasság harmada (az alaptól).
- Négyszög: az AC átló berajzolásával nyert két háromszög súlypontja S1 és S2, a BD átló behúzásával nyert két háromszögé S3 és S4. Az S1S2 és S3S4 egyenesek súlyvonalak, így metszéspontjuk a négyszög súlypontját adja.
- Trapéz:



- Sokszög: a legegyszerűbben háromszögekre bontással határozható meg.



- Körcikk: a szögfelező sugáron van.



$$x_S = \frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Félkörlap esetén: $x_s = 4R / (3\pi)$

<u>Vonalak súlypontja</u>:

$$\underline{r}_S = \frac{\int \underline{r}\, dl}{\int dl} = \frac{\sum \underline{r}_i l_i}{\sum l_i}$$

A súlypont koordinátái:

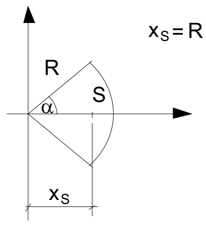
$$x_S = \frac{\int x\, dl}{\int dl} = \frac{\sum x_i l_i}{\sum l_i}$$

$$y_S = \frac{\int y\, dl}{\int dl} = \frac{\sum y_i l_i}{\sum l_i}$$

$$z_S = \frac{\int z\, dl}{\int dl} = \frac{\sum z_i l_i}{\sum l_i}$$

<u>Néhány vonal súlypontja</u>:

- Egyenes vonaldarab: a felezőpontban van.
- Körí累v: a szögfelező sugáron van.



$$x_S = R \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Félkörív esetén: $x_s = 2R / \pi$

Az egyszerű részekből összetett homogén test, síkidom, törtvonal súlypontjának kiszámítási menete:

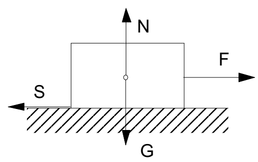
1. Célszerűen választott koordinátarendszer felvétele
2. Az összetett test, síkidom, törtvonal felbontása egyszerű részekre
3. A részek súlypontjainak meghatározása
4. Behelyettesítés a megfelelő képletbe
5. A kapott súlypont berajzolása az ábrába

9. A súrlódás jelenségének vizsgálata

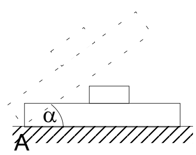
9.1 A nyugvásbeli és a mozgásbeli súrlódás. (Coulomb súrlódás)

A kényszerek tárgyalásánál az egymással érintkező testek felszínét teljesen simának tekintettük. Ennek megfelelően a megtámasztásnál a tökéletesen sima felületek egymást kölcsönösen a közös normális irányában nyomják. Az érintősíkban nincs kölcsönhatás. A feltevést azonban csak közelítően tudjuk megvalósítani, mert a valóságban a testek felszíne kisebb-nagyobb mértékben mindig érdes. A felszínek ilyen fizikai állapota miatt az egymással érintkező testek az érintősík irányába eső elmozdulással szemben is ellenállást fejtenek ki. Ez a jelenség a súrlódás.

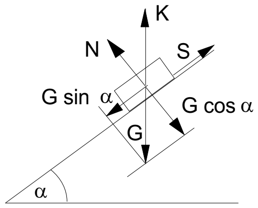
Ha a vízszintes síkra helyezett testre csak G súlyerő hat, a test egyensúlyban marad, akár érdes a test, akár sima. Ha a súlyerőn kívül egy vízszintes F erő is hat, akkor az tökéletesen sima érintkezési felszínek esetén elmozdítaná a testet. A valóságban - az érintkező felszínek érdessége miatt - az F erő hatására fellépő súrlódás miatt a test egyensúlyban maradhat.



Nem "nagy" F erő esetén a testet a nyugvásbeli súrlódó erő tartja egyensúlyban (S = F). Ha F nagyobb a lehetséges súrlódó erőnél, a test mozgásnak indul. A mozgás folyamán lép fel a mozgásbeli súrlódás. Azaz beszélhetünk nyugvásbeli és mozgásbeli súrlódásról. Ha a két érintkező felület pontjai egymáshoz képest nem mozdulnak el, akkor nyugvásbeli súrlódásról van szó, ha elmozdulnak egymáshoz képest, akkor mozgásbeli súrlódásról beszélünk.
Az összefüggések tisztázására végezzünk egy egyszerű kísérletet. A vízszintes alapon nyugvó síklemez közepére merev testet helyezzünk. Ezután a lemezt A pontja körül fokozatosan emeljük.



A test a lemezen egy darabig a lemez dőlése ellenére nyugalomban marad. Ha azonban a lemez hajlásszöge egy meghatározott α értéknél nagyobb, a test a lemez alkotta lejtőn megindul, és lecsúszik. (Ha a lemezre egy másik merev testet helyezünk, akkor a ρ_o határérték általában megváltozik.)
Rajzoljuk meg a lejtőt $\alpha < \rho_o$ helyzetben, amikor a G súlyú test még nem csúszik le a lejtőn, tehát még egyensúlyban van.



$$\underline{K} + \underline{G} = \underline{0} \qquad \underline{K} = \begin{bmatrix} S \\ N \end{bmatrix} \qquad \underline{G} = \begin{bmatrix} -G \sin\alpha \\ -G \cos\alpha \end{bmatrix}$$

A testre ható egyensúlyi erőrendszer a G súlyerőből és a vele közös hatásvonalú, egyező nagyságú, ellentétes értelmű K erőből áll. A K kényszererő lejtőirányú koordinátáját S-sel (súrlódó erő), normális irányú koordinátáját pedig N-nel (normálerő) jelöljük.
Az egyensúlyi egyenleteket a lejtő és a normálisa irányába írjuk fel:

$$S - G \sin\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad S = G \sin\alpha$$

$$N - G \cos\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad N = G \cos\alpha$$

a két egyenletből: $S = N \operatorname{tg} \alpha$

Egyensúly addig van, amíg a lejtő hajlásszöge nem lépi túl a ρ_o határértéket, azaz $\alpha < \rho_o$ .A testet a lejtő irányában egyensúlyban a súrlódó erő tartja. Értéke a lejtő hajlásszögével emelkedik, de csak az N $\operatorname{tg}\rho_o$ értékig, mert amint a lejtő hajlásszöge a ρ_o határértéket átlépi, a test mozgásnak indul.
Összefoglalva: A test nyugalmi helyzetében is ébred súrlódás, az ún. nyugvásbeli súrlódás. Ilyenkor a súrlódó erő nagysága éppen akkora, amekkora az egyensúly biztosításához szükséges, de nem lehet egy meghatározott értéknél nagyobb: $S \leq N \cdot \operatorname{tg}\rho_o$, ahol: $\operatorname{tg}\rho_o = S^{max}/N = \mu_o$ a nyugvásbeli súrlódás tényezője. A ρ_o szög a felületek érdességére jellemző. Meghatározása az előbb említett lejtőkísérlettel történik. A lejtő hajlásszögét addig növeljük, amíg a ráhelyezett test épp az elmozdulás határhelyzetébe kerül. Így: $S \leq \mu_o N$
A súrlódó erő ilyen módon való számolása Coulomb-tól származik. Ebben az értelemben szokás Coulomb-féle súrlódásról beszélni.

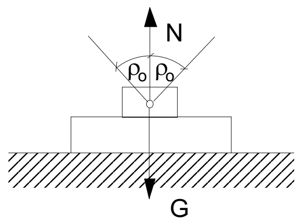
<u>A mozgásbeli súrlódás</u>

Ha a lejtő hajlásszöge túllépi a ρ határt, a test a lejtőn lecsúszik. Az ilyenkor fellépő mozgásbeli súrlódó erő a két test relatív sebességével ellentétes értelmű. Nagysága függ a normális erőtől, a felületek fizikai állapotától, a mozgás sebességétől. (Ha két száraz - kenés nélküli - érdes felület mozog egymáson, akkor a sebességtől független súrlódó erővel számolhatunk.)
Ebben az esetben a kényszererő két komponense közötti összefüggés: $S = \mu N$
ahol: μ a mozgásbeli súrlódási tényező.

9.2 A súrlódás vizsgálata szerkesztéssel

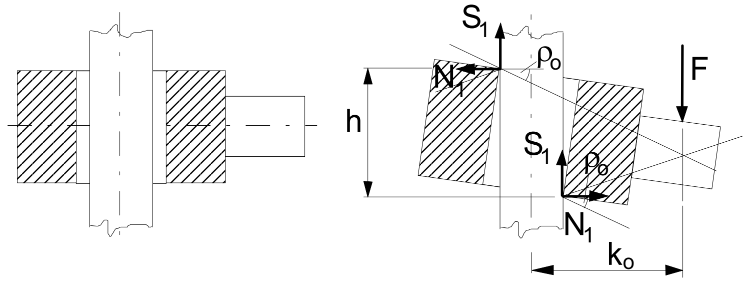
A felület érdességét a számító eljárásokban a μ ill. μ_o tényezővel jellemezzük, a szerkesztő eljárásokban pedig a súrlódás kúpjával, amelynek fél csúcsszöge ρ ill. ρ_o:
- Nyugvásbeli súrlódás esetén egyensúly csak akkor lehetséges, ha a kényszererő az érintkezés normálisa körül $2\rho_o$ csúcsszöggel szerkesztett súrlódási kúp palástján belül marad ($S < N\operatorname{tg}\rho_o$).
- Az elmozdulás határhelyzetében a kényszererő a kúp palástjára illeszkedik, azaz valamelyik alkotóval esik egybe ($S = N \operatorname{tg}\rho_o$)

- Mozgásbeli súrlódás esetén a reakció mindig egybeesik a súrlódási kúp palástjának valamely alkotójával ($S = N \operatorname{tg}\rho$).



Az önzárás feltétele

Megállapítandó, hogy a rajzolt szerkezet milyen $k = k_o$ karhosszúság mellett lesz önzáró. Önzárás esetén a k_o vagy annál nagyobb karon bármekkora erő működhet, a bilincs nem mozdul el.

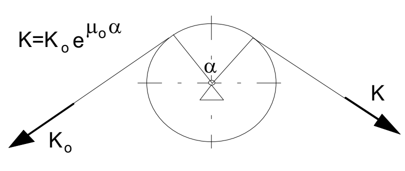


a./ Megoldás szerkesztéssel: a bilincs lefelé akar elcsúszni, a súrlódóerő iránya csak a rajzolt lehet. Az elmozdulás határhelyzete miatt a reakciók a szélső alkotókkal esnek egybe. Az F erő hatásvonala át kell menjen a kényszererők hatásvonalainak metszéspontján. Ebből a feltételből a k_o kar hossza meghatározható.

b./ Megoldás számítással:
$N_1 - N_2 = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 = N_2 \quad \rightarrow \quad S_1 = S_2 = \mu_o N$
$\mu_o N_1 + \mu_o N_2 - F = 0 \qquad (2)$
$\Sigma Mi(A) = \mu_o N_2 d + N_2 h - (k_o + d / 2) F = 0 \qquad (3)$
(2) -ből $\quad F = 2 \mu_o N$
(3) -ba beírva a kapott összefüggéseket, és N-nel egyszerűsítve:
$\mu_o d + h - 2 \mu_o k_o - 3 \mu_o d / 2 = 0 \quad \rightarrow \quad h - 2 \mu_o k_o = 0 \quad \rightarrow \quad k_o = 0.5\, h / \mu_o$

9.3 A kötélsúrlódás

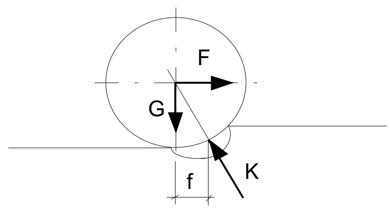
Egy kötél a középponti szögnek megfelelő íven nyugszik érdes hengerfelületre hajlítva. Teljesen sima hengerfelszín esetén a kötél a nagyobb erő irányába megcsúszik. Érdes felszínnél viszont a henger és a ráfeszülő kötél között súrlódó erők ébrednek, amelyek a mozgást gátolják, esetleg meg is akadályozzák. Az elmozdulás határán, az egyensúly határhelyzetében a kötél két ágában ható erők közötti összefüggés:



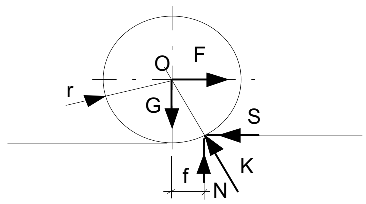
ahol
μ_o : a súrlódási tényező a kötél és a henger között
α : a felfekvő kötélkerület középponti szöge [rad]

9.4 Gördülő ellenállás

Vizsgáljunk egy gördülő kereket. Bármely forgástestnek sík felületen való gördüléséhez szükséges követelmény az, hogy ébredjen súrlódás, ill. súrlódó erő a test és a sík között. A gördülő kerék bizonyos mértékig belapul, és benyomódik az érintkező felületbe. Így az elméletileg keletkező koncentrált reakcióerő helyett egy megoszló reakció-erőrendszer keletkezik, amelynek eredője f távolsággal eltolódik a haladás irányába a kerék középvonalához képest. Ez az f a gördülő ellenállás karja [m]. Értéke kísérletileg állapítható meg.

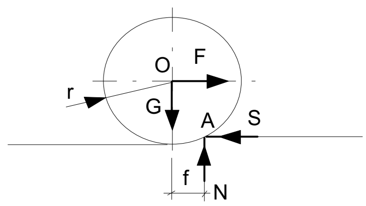


Ismert G és F erő. Határozzuk meg a gördülő ellenállás karját!

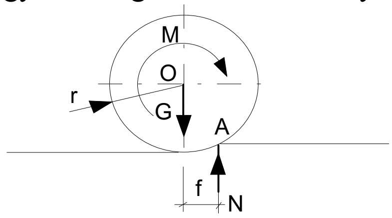


$\underline{G} + \underline{F} + \underline{K} = \underline{0}$
$N - G = 0$
$F - S = 0$
$N f - S r = 0 \Rightarrow f = S r / N$ elmozdulás határhelyzetében

Összefoglalva: gördüléskor a testek deformációjának következtében a mozgással szemben fellép egy ellenállás, az ún. gördülő ellenállás. A kerék gördítéséhez a tengelyen F vízszintes erőt alkalmazunk:



Az elmozdulás határán: $G f - F r = 0 =$ □ $M(A)$
innen: $F = G f / r$ az a legnagyobb erő, amelynek hatására a kerék még éppen nyugalomban marad. Nagyobb sugár esetén kisebb a gördítéshez szükséges F erő.
A kerék egyenletes gördüléséhez M nyomatékú erőpárt alkalmazunk:



$M = f N$ A nyugalom feltétele: $N f \geq M$

10. Síkbeli rácsos szerkezetek

A közös ponton támadó síkbeli erőknek igen fontos gyakorlati példája az egyszerű rácsos szerkezet. Ilyen szerkezetek terhek hordására, erők felvételére szolgálnak, mint pl. a rácsos híd, a rácsos darutartó, a rácsos tetőszerkezet, a rácsos oszlop stb. Az egyszerű rácsos szerkezetet végeikkel csuklósan kapcsolódó egyenes rudakból állónak vesszük.
A rácsos szerkezeteket a következő feltevések alapján tárgyaljuk:

- A rácsos szerkezetben a rudak végei teljesen sima (súrlódástalan) csuklókkal kapcsolódnak egymáshoz.
- Valamennyi rúd tengelye közös síkban fekszik.
- A szerkezetet terhelő erők csakis a csomópontokban hatnak, és hatásvonaluk beleesik a szerkezet síkjába.
- A szerkezetet egyensúlyban lévő erők terhelik.
- A rudaknak a terheléskor bekövetkező hosszváltozásától eltekintünk, vagyis a rudakat a rúderő meghatározásakor merevnek tekintjük.

A rácsos szerkezet rúdjait, mivel azok csak végeiken, a csuklókon terhelt egyenes rudak, csak rúdirányú húzó, vagy nyomóerők, az ún. rúderők terhelik. A rácsos szerkezet statikai vizsgálata éppen ezen rúderők meghatározásából áll. A következőkben a megtámasztás szempontjából statikailag határozott egyszerű rácsos szerkezetekkel fogunk foglalkozni. Az egyszerű, statikailag határozott rácsos szerkezetekben a rudak száma (m) és a csuklók száma (n) között mindig fennáll az

$$m = 2n-3$$

összefüggés.

10.1 Csomóponti módszer

A rácsos szerkezet rúderőinek meghatározására szolgáló egyik eljárás az egyes csuklók csapjának, vagyis az egyes csomópontoknak az egyensúlyából indul ki. Az eljárást röviden csomóponti módszernek nevezik. A módszer a csomópontban összefutó minden egyes rúd hatását a csuklóra a rúderővel helyettesíti, és ilyen módon minden csomóponton a külső erőknek és a rúderőknek egy-egy rendszerét állítja elő. Ezekben a közös ponton támadó síkbeli erőrendszerekben a külső erőket teljesen ismerjük, a rúderőknek azonban csak az irányuk ismeretes, nagyságukat és értelmüket éppen az erőrendszer egyensúlyából fogjuk megállapitani. A meghatározás történhet szerkesztés vagy számítás útján. Szerkesztés esetén a közös ponton támadó erőrendszer egyensúlyát záródó vektorsokszög fejezi ki, és a vektorsokszög záródásával két ismeretlen határozható meg. Ez most igen fontos megállapítás, mert utasítást ad munkánk berendezésére: a szerkezet vizsgálatát csakis olyan csomóponton kezdhetjük el, ahol a szerkezet két rúdban végződik, a vizsgálat alá vont további csomópontokban pedig az ismeretlen rúderők száma legfeljebb kettő lehet. Az egyszerű rácsos szerkezetek esetében ezeknek a megszorító feltételeknek mindig eleget lehet tenni, ilyen szerkezetek rúderői tehát a csomóponti módszerrel mindig meghatározhatók.

10.2 Átmetsző módszer

Olyan esetben, amikor nem valamennyi, hanem csak egy vagy néhány rúderő értékét kell meghatározni, előnyösen alkalmazható az átmetsző módszer. Természetesen a módszer ismételt alkalmazásával a rácsos szerkezet valamennyi rúderejét is meghatározhatjuk. Az eljárás lényege a következő:
képzeletben átmetszéssel a rácsos szerkezetet két független részre vágjuk. Az átmetszést úgy kell végeznünk, hogy a vizsgálni kívánt rudat találja és még két rudat úgy, hogy a három rúd hatásvonala ne egy pontban metsződjön, vagyis összesen három rudat metszünk át. (Síkban három egyensúlyi egyenletünk van, és ebből legfeljebb három ismeretlen határozható meg). A képzeletben elvágott részek az elmetszett rudakban ébredő erőkkel és a rájuk ható külső terhelő erőkkel együtt egyensúlyban vannak. Az ismert külső erők eredőjét könnyen meghatározhatjuk, az elmetszett három rúdban ébredő erők iránya ismert, így a feladat négy erő egyensúlyára vezethető vissza. Megoldható szerkesztéssel (Culmann módszer) vagy számítással (Ritter eljárás).

11. Igénybevételek

11.1 A feszültség fogalma

A tartókra ható erőket két csoportra bonthatjuk. A szerkezet önsúlya, a külső hatásokból származó erők, azaz a terhelés, valamint a reakciók alkotják a külső erőket, ill erőrendszert, amely egyensúlyi, azaz:

$$\Sigma\,\underline{F} = \underline{0} \qquad \text{és} \qquad \Sigma\,(\underline{r} \times \underline{F}) + \Sigma\,\underline{M} = \underline{0}$$

Beszélhetünk belső erőkről is, amelyeket akkor kapunk meg, amikor a tartót valamelyik keresztmetszete mentén gondolatban kettévágjuk. Az elvágott keresztmetszetben egy felület mentén megoszló erőrendszer működik, - amely a másik tartórész hatásának a következménye - ami biztosítja a tartórész egyensúlyát. Ennek a keresztmetszet felületén megoszló belső erőrendszernek a fajlagos értéke, az erőintenzitás-vektora a feszültség, amely tehát a keresztmetszet 1 m^2-ére ható belső erő: $\underline{\rho}$ $[N/m^2]$. Ennek eredőjét a keresztmetszet súlypontjában igénybevételnek nevezzük. A tartók méretezésénél mindig az igénybevételek meghatározására törekszünk.

11.2 Az igénybevétel definíciója és meghatározása

Keressük egy rúd alakú tartó egyik kijelölt keresztmetszetének az igénybevételét. Evégből a rudat az eddigiek szerint a vizsgálandó keresztmetszet mentén két részre vágottnak képzeljük.
Az elhagyott bal oldali rúdrészre ható erőrendszernek a megmaradó rúd elvágott keresztmetszetének súlypontjába redukált vektorkettőse:$[\underline{F};\underline{M_s}]$.Ha pedig a jobb oldali erőrendszert redukáljuk az S pontba, akkor a kapott $[\underline{F'};\underline{M_s'}]$ -re fennáll a hatás-ellenhatás törvényénél fogva: $\underline{F} = -\underline{F'}$ és $\underline{M} = -\underline{M'}$. Ezt az $\underline{F}(\underline{F'})$ eredő erőt és az $\underline{M}(\underline{M'})$ nyomatékú erőpárt nevezzük a keresztmetszet igénybevételének.
Általában tehát: Egy keresztmetszet igénybevételén a keresztmetszet egyik oldalán lévő erőrendszernek a keresztmetszet súlypontjába való redukáltját értjük. (Ez egyenértékű a

keresztmetszet mentén működő belső, megoszló erőrendszernek a keresztmetszet súlypontjába számított eredőjével.)

11.3 Az igénybevétel fajtái

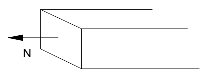
Bontsuk fel az $\underline{F}$ és $\underline{M}_s$ vektorokat a koordinátatengelyek szerinti összetevőkre (vagyis a keresztmetszet síkjába eső és arra merőleges komponensekre):

$$\underline{F} = X\underline{i} + Y\underline{j} + Z\underline{k} \qquad \text{és} \qquad \underline{M} = M_x\,\underline{i} + M_y\,\underline{j} + M_z\,\underline{k}$$

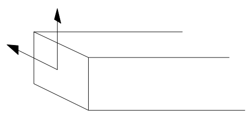
Az erőrendszer redukáltját tehát hat tényező jellemzi. Ebből három egy-egy erő, melynek közös támadáspontja a keresztmetszet súlypontja, hatásvonaluk pedig azonos a felvett koordinátatengelyekkel. A másik három egy-egy erőpár, melyek az x, y és z tengely körül forgatnak. Ha az összetevők közül csak egy nem zérus, akkor alap igénybevételről beszélünk.

Alapigénybevételek:

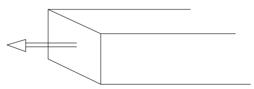
1. Ha csak az $X \neq 0$, azaz az erő a keresztmetszet síkjára merőleges, akkor az igénybevétel húzás, ill. nyomás ($X \equiv N$).



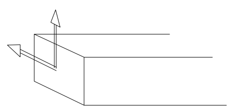
2. Ha csak az $Y \neq 0$, vagy csak $Z \neq 0$, vagy egyik sem zérus, vagyis az eredő a keresztmetszet síkjába esik, akkor az igénybevétel nyírás ($Y \equiv V$ ill. $Z \equiv V$).



3. Ha csak az $M_x \neq 0$, azaz az eredő erőpár a keresztmetszet síkjára merőleges tengely körül forgat, akkor az igénybevétel csavarás ($M_x \equiv M_t$).

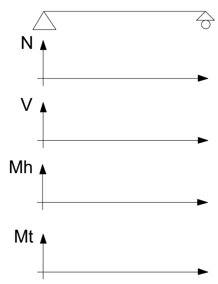


4. Ha csak $M_y \neq 0$, vagy $M_z \neq 0$, azaz az erőpár a keresztmetszet síkjába eső tengely körül forgat, akkor az igénybevétel hajlítás ($M_y \equiv M_h$ ill. $M_z \equiv M_h$).



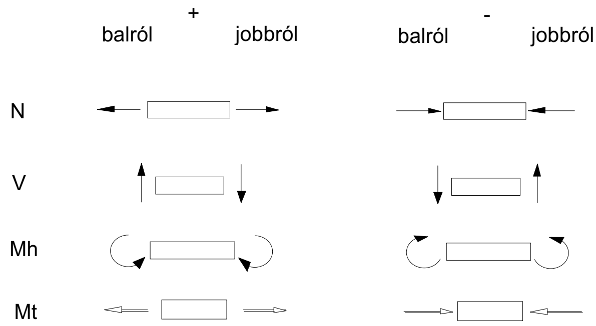
11.4 Az igénybevételi ábra

A tartó hossztengelye mentén ábrázolt alap igénybevételeket igénybevételi ábráknak nevezzük:



11.5 Előjelszabály

Az igénybevételi ábrák rajzolásakor következetes előjelszabályt kell betartanunk. Az előjelnek függetlennek kell lennie attól, hogy az ábrák rajzolását balról vagy jobbról kezdjük. Az alkalmazott előjelszabály:



A pozitív előjelű mennyiségeket mindig az adott igénybevételi ábra zérus vonala fölé mérjük, míg a negatívakat alá.

11.6 Összefüggés a terhelés és az igénybevételek között

$$\frac{dV}{dx} = p(x) \qquad \text{integrálva:} \qquad V = V_O + \int_o^x p(x)\,dx$$

(ahol V_o a nyíróerő kezdeti értéke) $(x = 0)$ adódik.

$$\frac{dM}{dx} = -V(x) \qquad \text{integrálva:} \qquad M = M_O - \int_o^x V(x)\,dx$$

adódik, ahol M_O a hajlítónyomaték kezdeti értéke $(x = 0)$.

A fenti összefüggések az ún. Zsuravszkij tételek.
Mindezek alapján, ha az adott tartót terhelő egyensúlyi erőrendszert ismerjük (a rendelkezésre álló egyensúlyi egyenletekből az ismeretlen reakcióerőket meghatároztuk), akkor a tartó terhelésének ismeretében integrálással megkaphatjuk a V nyíróerő ábrát, és ebből - ugyancsak integrálással - a hajlítónyomatéki ábrát.
Ahol a tartón koncentrált erő hat, ott a koncentrált erő irányának megfelelően - ha a tartón balról jobbra haladunk - felfelé mutatónál pozitív, lefelé mutatónál negatív irányú szakadás keletkezik a nyíróerő ábrában. Ennek a nagysága a koncentrált erő értéke.
Ha a tartó valamely keresztmetszetében koncentrált erőpár működik, akkor ezen a helyen a nyomatéki ábrában szakadás keletkezik. A szakadás nagysága a koncentrált erőpár nyomatékának értéke. Pozitív irányú az ugrás, ha - a tartón balról jobbra haladva - a koncentrált erőpár nyomatéka a megmaradó tartórészekre pozitív.

A $p(x)$, $V(x)$ és $M(x)$ függvények közötti differenciális kapcsolat:

$p(x)$	$V(x)$	$M(x)$
0	0	állandó
	állandó $\neq 0$	lineáris
állandó	lineáris	másodfokú parabola
lineáris	másodfokú parabola	harmadfokú parabola
stb. A parabolák tengelye a rúdra merőleges irányú		

Ahol $\dfrac{dM(x)}{dx} = -V(x) = 0$, ott a hajlítónyomatéknak helyi szélsőértéke van. A maximális hajlítónyomaték - $M_{\max} = |M_{\max}|$ - helyét tehát ott kell keresni, ahol a V ábra metszi az alapvonalat (szakadással is), vagy ahol koncentrált erőpár terheli a tartót.

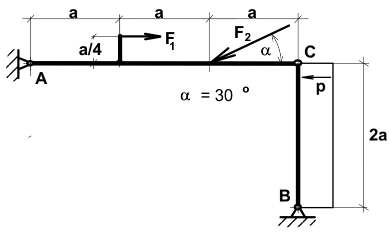
12. Csuklós szerkezetek

Csuklókkal kapcsolódó egyenes rudakból álló szerkezetek, amelyek tetszőleges helyen kaphatnak terhelést. A rudakat összekötő csuklók a rúdvégektől eltérő helyen is lehetnek.

Csuklós szerkezetek esetén a reakcióerők meghatározása szuperpozícióval vagy részekre bontással történhet.

12.1 Háromcsuklós szerkezetek (bakállvány)

"Háromcsuklós" a szerkezet, ha van olyan csukló, amelyből kivéve a csapot a szerkezet két különálló merev testre esik szét.



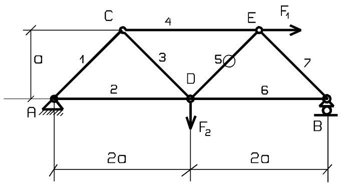
Ebben a feladatban a C-vel jelölt csukló ilyen. Kivéve a csapot az AC merev test (AC-rúd) és a BC merev test (BC-rúd) függetlenek lesznek egymástól.

A szuperpozíció elve szerint, ha a szerkezetre működő 1-es aktív erőrendszerrel az $\underline{A}_1$ és $\underline{B}_1$ reakcióerők tartanak egyensúlyt, és a szerkezetre működő 2-es aktív erőrendszerrel az $\underline{A}_2$ és $\underline{B}_2$ reakcióerők tartanak egyensúlyt, akkor a szerkezetre egyidejűleg működő 1-es és 2-es aktív erőrendszerrel egyensúlyt tartó reakcióerők:

$\underline{A} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2$; $\underline{B} = \underline{B}_1 + \underline{B}_2$.

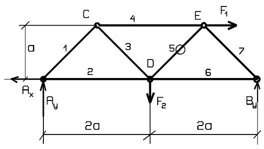
13. Példa a rácsos szerkezetre

Jelölések: A rudakat számozzuk, a csomópontokat nagy betűkkel jelöljük.



A példa adatai:
a = 1 m $F_1 = 4$ kN $F_2 = 6$ kN

1. A reakcióerőrendszer meghatározása.



Az egyensúlyi egyenleteket:

$$F_x \equiv -A_x + F_1 = 0 \qquad (1)$$
$$F_y \equiv A_y - F_2 + B = 0 \qquad (2)$$
$$M_a \equiv B.4a - F_2.2a - F_1.a = 0 \qquad (3)$$
$$M_b \equiv F_2.2a - F_1.a - A_y.4a = 0 \qquad (4)$$

A 4 egyenletből csak 3 független!

Az (1)-ből: $A_x = F_1 = 4$ kN;

a (3)-ból: $B = \dfrac{F_2}{2} + \dfrac{F_1}{4} = 4$ kN;

a (4)-ből: $A_y = \dfrac{F_2}{2} - \dfrac{F_1}{4} = 2$ kN.

A (2) -sel ellenőrizünk: $2 - 6 + 4 \equiv 0 = 0$.

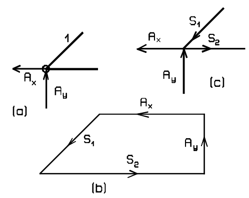
2. A rúderők meghatározása csomóponti módszerrel

A csomóponti módszer azt jelenti, hogy az egyes csomópontokra működő erők egyensúlyából határozzuk meg a rúderőket.

a) Megoldás szerkesztéssel

Mindig két külön ábra van: a szerkezeti ábra, amelyen a csomópont és a csomópontban összefutó rudak középvonalai - a rúderők hatásvonalai - vannak, és a vektorábra, amelyen az erőmértéknek megfelelően összegezzük az erőket, és amelynek az egyensúly kifejezéseként folytonos nyílfolyammal záródni kell.
Egy csomópont egyensúlyából legfeljebb két ismeretlent tudunk meghatározni, ezért mindig olyan csomópont egyensúlyával kell foglalkoznunk, amelyben legfeljebb két ismeretlen van.
Esetünkben kezdhetjük az *A* vagy a *B* csomóponttal. Az *A*-t választjuk. A vektorábrához felvesszük az erőmértéket:

1 cm ÷ x kN

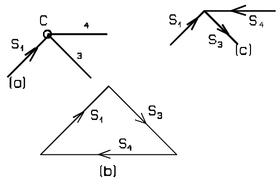


Az "*A*" csomópont egyensúlya

A szerkezeti ábra - (a. ábra). Ismert az A_x és A_z ismeretlenek az S_1 és S_2 rúderők. A vektorábrán (b. ábra) az A_x és A_z eredőjével (A) tart egyensúlyt a két ismert irányú S_1 és S_2 - az A_z kezdőpontjából a 2-es az A_x végpontjából az 1-es rúddal húzunk párhuzamosat, metszéspontjuk kijelöli nagyságukat. Irányításukat az adja meg, hogy a vektorábrának folytonos nyílfolyammal kell záródni. Ezután berajzoljuk a kapott irányításokat a szerkezeti ábrába - itt újból megrajzoltuk, hogy világos legyen a szerkesztés menete (c. ábra). Az S_1 erő nyomja a csomópontot - azaz a csomópont nyomja a rudat, tehát az 1-es rúd nyomott. A nyomott rudakban ébredő erőket negatív jellel jelöljük. (Ilyenkor a szerkezeti ábrába rajzolt "csuklóerő" a csukló felé mutat. Végül leolvassuk a vektorábrából a rúderők értékeit az erőmérték segítségével. Itt a 45°-os szögek miatt tudjuk a pontos értékeket: S_1 = 2,83 kN, S_2 = 6 kN. A 2-es rúd húzott.

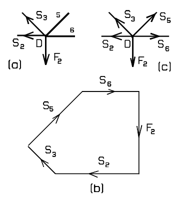
A következő csomópont kiválasztása: A *D* csomópontban ismert az F_2 és S_2, de nem ismert az S_3, S_5 és S_6, így ide nem jöhetünk. Ezért a *C* csomóponttal folytatjuk.

A "*C*" csomópont egyensúlya



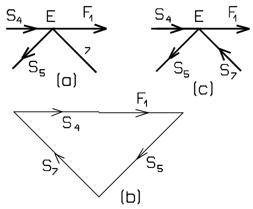
A leolvasott rúderő értékek: S_3 = 2,83kN, S_4 = 4 kN.

A "*D*" csomópont egyensúlya:



A leolvasott rúderő értékek: S_5 = 5,66 kN S_6 = 4 kN.

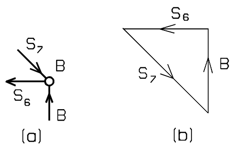
Az "*E*" csomópont egyensúlya:



A leolvasott rúderő: S_7 = 5,66 kN.

Ez részben már ellenőrzés, hiszen csak egy ismeretlen van, az S_7 , és ezzel záródni kell a vektorsokszögnek. Ha nem záródik azt jelenti, hogy valamit elrontottunk az eddigiekben.

A "*B*" csomópont egyensúlya:

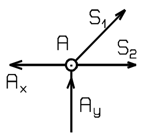


Ez teljes egészében ellenőrzés, hiszen minden erőt ismerünk, a vektor ábrának záródni kell.

b) Megoldás számítással

Ugyanebben a sorrendben az egyes csomópontokra működő erőket berajzoljuk - MINDEN rudat HÚZOTTnak tekintve, és csomópontonként két-két (x és y irányú) egyensúlyi egyenletet felírva két-két ismeretlen rúderőt ki tudunk számolni.

Az "*A*" csomópont egyensúlya

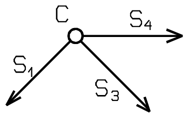


$- A_x + S_2 + S_1 \cos 45^{\circ} = 0$

$A_y + S_1 \sin 45^{\circ} = 0,$

ezekből: $S_1 = -2\sqrt{2}$ kN,(nyomott) $S_2 = 6$ kN (húzott).

A "*C*" csomópont egyensúlya

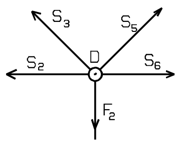


$-S_1 \cos 45^{\circ} + S_4 + S_3 \cos 45^{\circ} = 0$

$-S_1 \sin 45^{\circ} - S_3 \sin 45^{\circ} = 0,$

ezekből: $S_3 = 2\sqrt{2}$ kN $S_4 = -4$ kN (nyomott).

A "*D*" csomópont egyensúlya

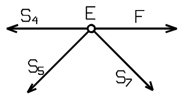


$-S_2 - S_3 \cos 45^{\circ} + S_5 \cos 45^{\circ} + S_6 = 0$

$S_3 \sin 45^{\circ} + S_5 \sin 45^{\circ} - F_1 = 0$

ezekből: $S_5 = 4\sqrt{2}$ kN $S_6 = 4$ kN

Az "*E*" csomópont egyensúlya

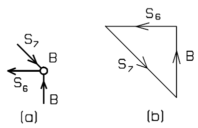


$- S_4 - S_5 \cos 45^{\circ} + F_1 + S_7 \cos 45^{\circ} = 0$

$- S_5 \sin 45^{\circ} - S_7 \sin 45^{\circ} = 0$

mindkettőből: $S_7 = -4\sqrt{2}$ kN.

A "*B*" csomópont egyensúlya
(mindkét egyenlet ellenőrzésre szolgál)



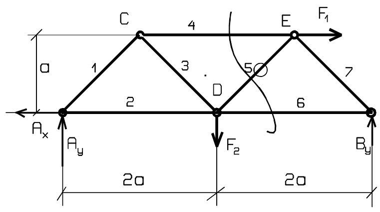
$- S_6 + S_7 \cos 45^{\circ} = 0$

$B_y + S_7 \sin 45^{o} = 0$ (Mindkét egyenlet azonosan teljesül.)

3. <u>Az 5-ös rúderő meghatározása átmetsző módszerrel</u>

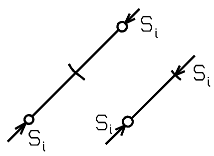
<u>Az átmetsző módszer:</u> Egy felülettel (a rajz síkjában vonallal) úgy vágjuk el a szerkezetet, hogy:

1. a szerkezet két külön részre esik,
2. három rudat vágunk át és
3. a három rúd nem futhat közös csomópontba.



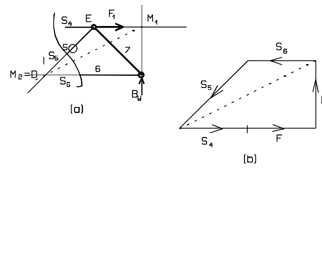
A kétfelé vágott szerkezet egyik felét megtartjuk, és e rész egyensúlyából határozzuk meg az átvágott rudakban a rúderőket.

Ennek elvi alapja: ha egy rúderővel terhelt rudat elvágunk, a vágási felületen az elhagyott rész hatását pótolva éppen a rúderőnek kell működni, hogy a megmaradt rész egyensúlyban legyen.



a) <u>Megoldás szerkesztéssel</u>

Az ismert külső erőket (B és F_1) helyettesítjük az eredőjükkel hatásvonalaik M_1 metszéspontjában, majd Culmann szerkesztéssel meghatározzuk a három adott hatásvonalú erő nagyságát és irányítását.



b) Megoldás számítással

Az ismeretlen rúderőket húzottnak tételezzük fel, berajzoljuk, és felírunk három egyensúlyi egyenletet:

- nyomatéki egyenlet az *E* csomópontra:

$$B.a - S_6.a = 0 \quad \text{ebből} \quad S_6 = B = 4 \text{ kN};$$

- y irányú egyensúlyi egyenlet:

$$- S_5 \sin 45^o + B = 0 \quad \text{ebből} \quad S_5 = B\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ kN}.$$

- Az x irányú egyenletből $S_4 = - 4$ kN.